8　関数の性質

基本問題 & 解法のポイント

13

$(f\circ h)(x)=f(h(x))=h(x)+2$

これと $(f\circ h)(x)=g(x)$ より，$h(x)+2=x^2$　$\therefore h(x)=x^2-2$　・・・(答)

14

$y=f(x)$ とすると，$y=\dfrac{3x}{x+1}$ より，$y(x+1)=3x$　すなわち　$x(y-3)=-y$

ここで，$y=3$ とすると，$x\cdot 0=-3$ より，これを満たす x は存在しない。

よって，$y\neq 3$ より，$x=-\dfrac{y}{y-3}$

ゆえに，$f^{-1}(x)=-\dfrac{x}{x-3}$　・・・(答)

$y=g(x)$ とすると，$y=2x-1$ より，$x=\dfrac{y+1}{2}$

よって，$g^{-1}(x)=\dfrac{x+1}{2}$　・・・(答)

$$\begin{aligned}(f\circ g)^{-1}(x)&=\left(g^{-1}\circ f^{-1}\right)(x)\\&=g^{-1}\left(f^{-1}(x)\right)\\&=g^{-1}\left(-\frac{x}{x-3}\right)\\&=\frac{-\dfrac{x}{x-3}+1}{2}\\&=-\frac{3}{2(x-3)}\end{aligned}$$　・・・(答)

補足

$x\xrightarrow{g}g(x)\xrightarrow{f}f(g(x))$ より，$g^{-1}\left(f^{-1}(x)\right)\xleftarrow{g^{-1}}f^{-1}(x)\xleftarrow{f^{-1}}x$

よって，$\{f(g(x))\}^{-1}=g^{-1}\left(f^{-1}(x)\right)$

A

46

(1)

$$\begin{aligned}(f\circ g)(x)&=f(g(x))\\&=f\left(\frac{3x+b}{x+c}\right)\\&=\frac{2\cdot\frac{3x+b}{x+c}+a}{\frac{3x+b}{x+c}+1}\\&=\frac{(a+6)x+2b++ac}{4x+b+c}\end{aligned}$$

したがって，条件より，$\dfrac{(a+6)x+2b+ac}{4x+b+c}=\dfrac{9x+8}{4x+3}$ は恒等式である。

これと分母の x の係数が等しいことから，

$a+6=9,\ 2b+ac=8,\ b+c=3$

これを解くことにより，$a=3,\ b=1,\ c=2$

(2)

$y=\sqrt{ax+b}\iff y^2=ax+b,\ y\geq 0\iff x=\dfrac{y^2}{a}-\dfrac{b}{a},\ y\geq 0$ より，

$y=\sqrt{ax+b}$ の逆関数は $y=\dfrac{x^2}{a}-\dfrac{b}{a},\ x\geq 0$

$y=\sqrt{ax+b}$ の逆関数は $y=\dfrac{1}{6}x^2-\dfrac{1}{2},\ x\geq 0$ となるから，$a=6,\ b=3$

47

(1)

$y=f(x)=\sqrt{7x-3}-1$ とおくと，$\sqrt{7x-3}\geq 0$ より，$y\geq -1$　・・・①
また，$y=\sqrt{7x-3}-1$ より，$y+1=\sqrt{7x-3}$

この両辺を 2 乗して整理すると，$x=\dfrac{1}{7}(y^2+2y+4)$

これと①より，$x=\dfrac{1}{7}(y^2+2y+4)$ （$y\geq -1$）

よって，求める逆関数は $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{7}(x^2+2x+4)$ （$x\geq -1$）

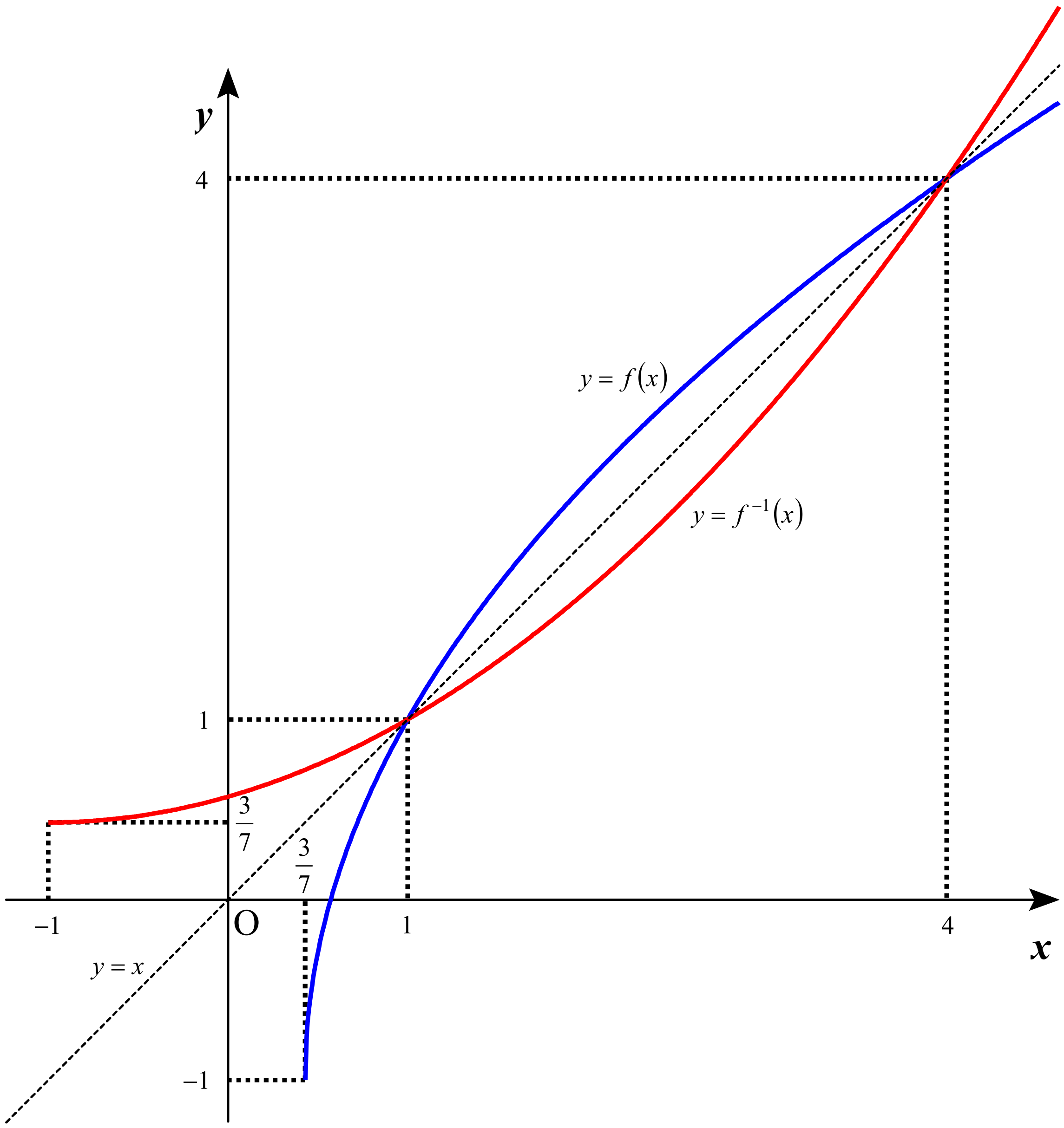
(2)

交点の x 座標は $x=\sqrt{7x-3}-1$　・・・②　の解である。
②の両辺を 2 乗して，整理すると $x^2-5x+4=0$ すなわち $(x-1)(x-4)=0$

よって，必要条件は $x=1,\ 4$ であり，これは②を満たす。
ゆえに，交点の x 座標は $1,\ 4$
交点の座標は $y=x$ 上の点だから，求める座標は $(1,\ 1),\ (4,\ 4)$

(3)

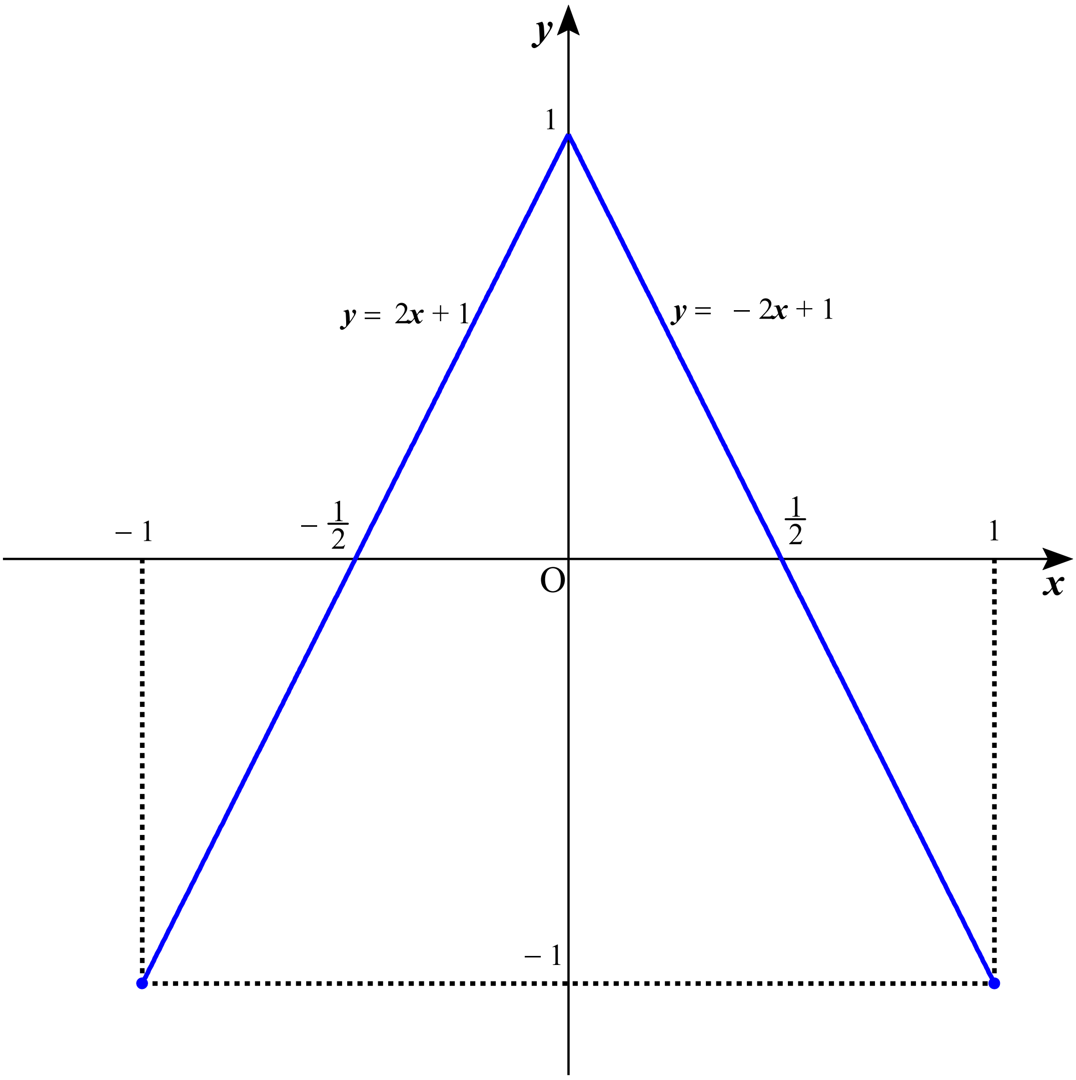
$y=f(x)$ と $y=f^{-1}(x)$ は $y=x$ に関して対称であることと(2)より，
$y=f(x)$ と $y=f^{-1}(x)$ の交点は $(1,\ 1),\ (4,\ 4)$ である。
これと $y=f(x)$ は上に凸，$y=f^{-1}(x)$ は下に凸な曲線であることから，
求める解は $1\leq x\leq 4$



48

(1)

$y=f(x)$のグラフは下図のようになる。



$y=(f\circ f)(x)=f(f(x))$ より，

$-1\leq f(x)<0$ のとき $y=2f(x)+1$

ここで，$-1\leq f(x)<0$ となるのは，$y=f(x)$のグラフより，$-1\leq x<-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}<x\leq 1$ のとき

これと $-1\leq x<-\frac{1}{2}$ のとき $f(x)=2x+1$，$\frac{1}{2}<x\leq 1$ のとき $f(x)=-2x+1$ より，

$y=4x+3\ \left(-1\leq x<\frac{1}{2}\right)$　・・・①

$y=-4x+3\ \left(\frac{1}{2}<x\leq 1\right)$　・・・②

$0 \leq f(x) \leq 1$ のとき $y = -2f(x) + 1$

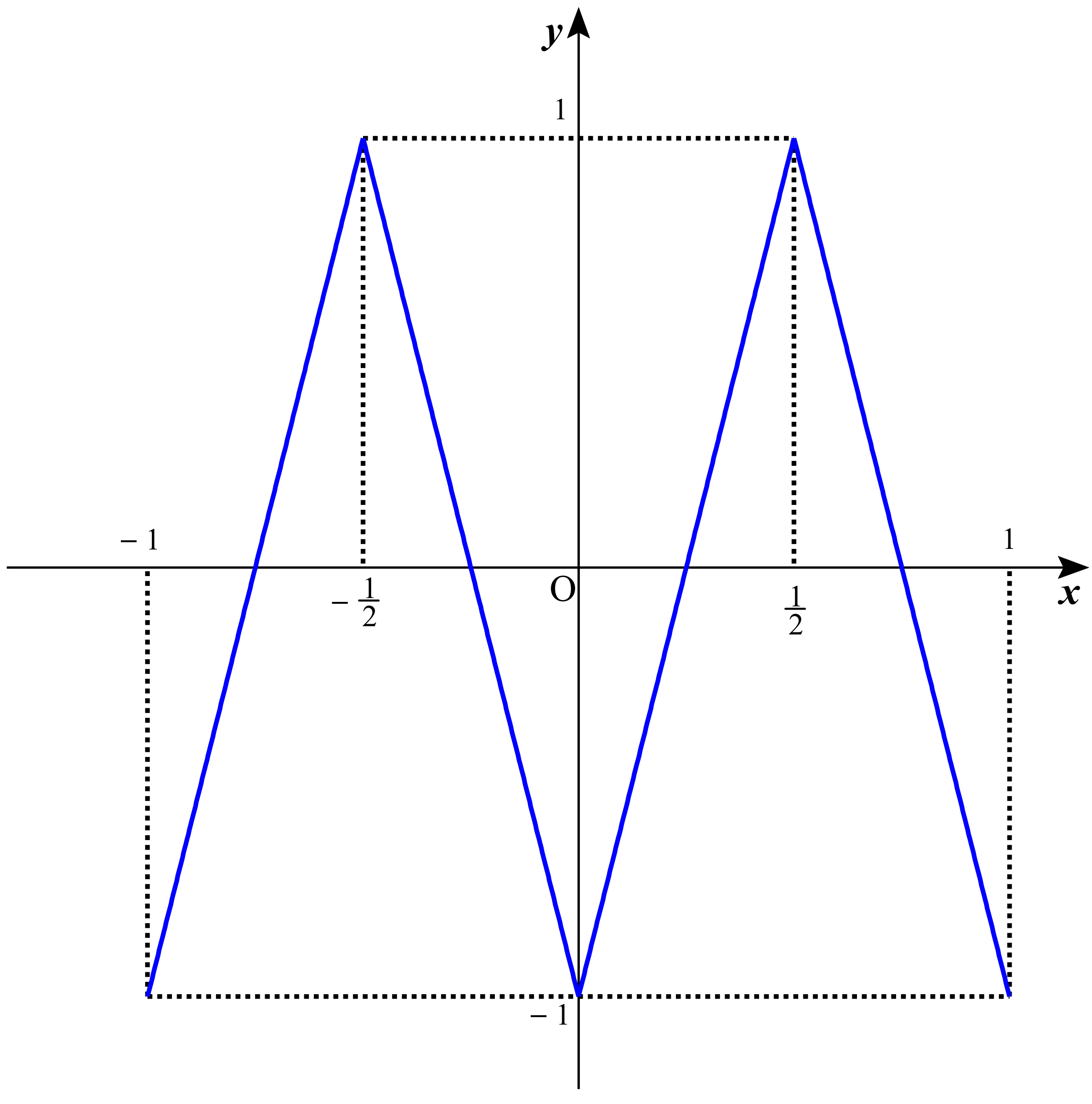
同様にして，$0 \leq f(x) \leq 1$ となるのは $-\frac{1}{2} \leq x < 0,\ 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ のとき

これと $-\frac{1}{2} \leq x < 0$ のとき $f(x) = 2x + 1$，$0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ のとき $f(x) = -2x + 1$ より，

$y = -4x - 1 \left(-\frac{1}{2} \leq x < 0 \right)$ ・・・③

$y = 4x - 1 \left(0 \leq x \leq \frac{1}{2} \right)$ ・・・④

①，②，③，④より，$y = (f \circ f)(x)$ のグラフは下図のようになる。



(2)

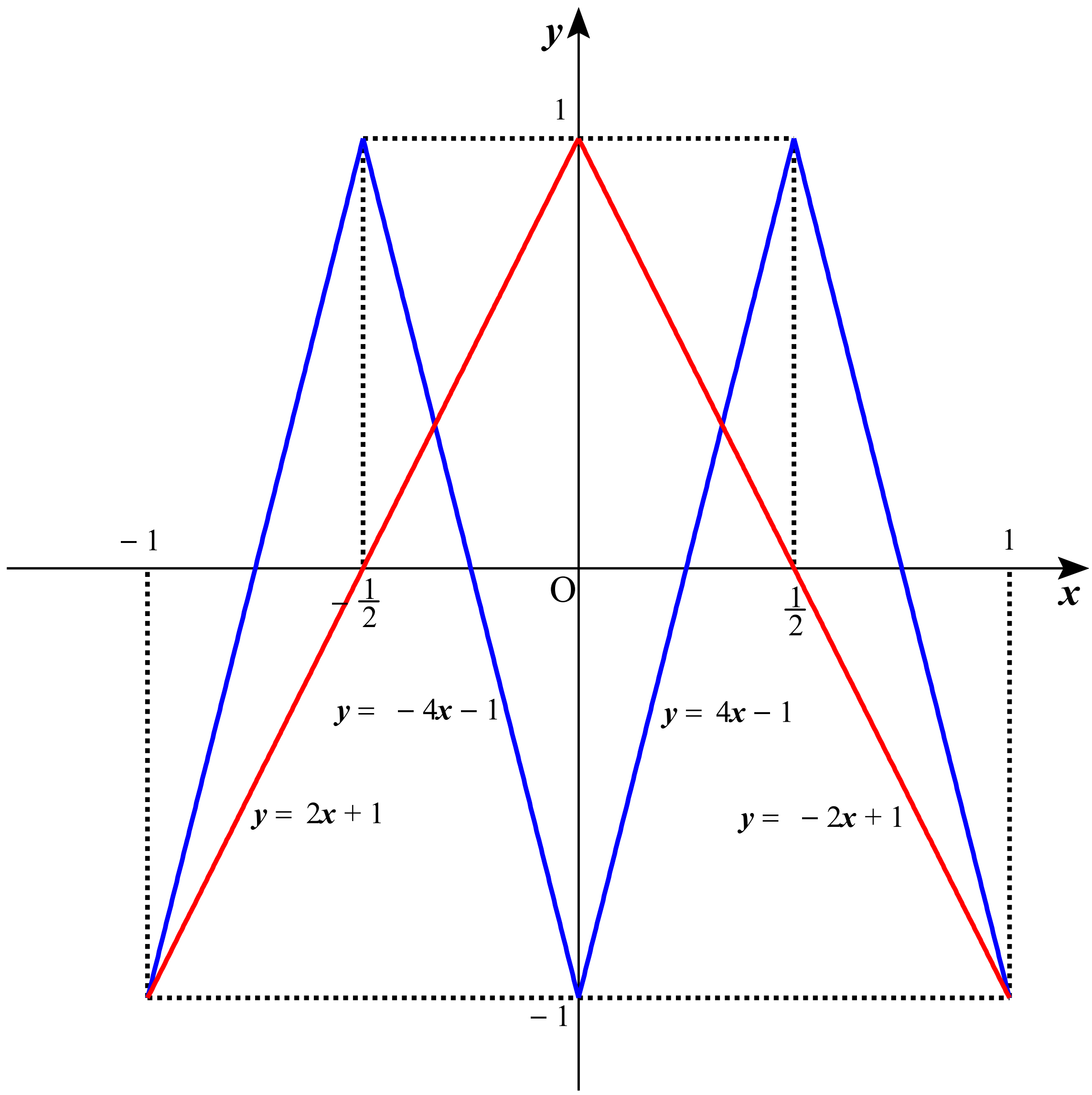
a の値は $y=(f\circ f)(x)$ と $y=f(x)$ の共有点の x 座標である。

よって，下図より，a は ±1，$y=2x+1$ と $y=-4x-1$ の共有点の x 座標および $y=-2x+1$ と $y=4x-1$ の共有点の x 座標である。

$y=2x+1$ と $y=-4x-1$ の共有点の x 座標は $2x+1=-4x-1$ より，$x=-\dfrac{1}{3}$

$y=-2x+1$ と $y=4x-1$ の共有点の x 座標は $-2x+1=4x-1$ より，$x=\dfrac{1}{3}$

よって，$a=\pm1,\ \pm\dfrac{1}{3}$ ・・・(答)



49

(1)

$y=f(x)$とおくと，$y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

ここで，$ad-bc\neq 0$より，$a=b=0$とはならないから$y=f(x)$は$y=0$ではない。

よって，$y=f(x)$の逆関数が存在する。

$y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$の両辺に$cx+d$を掛け，整理すると，$x(cy-a)=-dy+b$

$cy-a=0$すなわち$y=\dfrac{a}{c}$とすると，右辺は$-\dfrac{a}{c}\cdot d+bc=-\dfrac{ad-bc}{c}\neq 0$

よって，$x(cy-a)=-dy+b$を満たすxは存在しない。すなわち$cy-a\neq 0$

ゆえに，$x=\dfrac{-dy+b}{cy-a}$より，$f^{-1}(x)=\dfrac{-dx+b}{cx-a}$　・・・(答)

(2)

条件より，$\dfrac{ax+b}{cx+d}=\dfrac{-dx+b}{cx-a}$

この両辺に$(cx+d)(cx-a)$を掛けると，$(ax+b)(cx-a)=(-dx+b)(cx+d)$

これを展開し，xについて整理すると，$c(a+d)x^2-(a-d)(a+d)x-b(a+d)=0$

よって，$(a+d)\{cx^2-(a-d)x-b\}=0$

$(a+d)\{cx^2-(a+d)x-b\}=0$は恒等式だから，

$a+d=0$または$cx^2-(a+d)x-b=0$が恒等式

ところが，$f(x)\neq x$より，$\dfrac{ax+b}{cx+d}\neq x$すなわち$cx^2-(a+d)x-b\neq 0$

よって，$a+d=0$は$f(x)=f^{-1}(x)$, $f(x)\neq x$であるための必要条件である。

逆に，$a+d=0$とすると，$\dfrac{ax+b}{cx+d}=\dfrac{-dx+b}{cx-a}$より，$f(x)=f^{-1}(x)$が成り立つ。

また，$c=0$とすると，$\dfrac{ax+b}{cx+d}=\dfrac{ax+b}{d}=\dfrac{-dx+b}{d}=-x+\dfrac{b}{d}\neq x$より，$f(x)\neq x$

よって，$a+d=0$は$f(x)=f^{-1}(x)$, $f(x)\neq x$であるための十分条件である。

ゆえに，求める関係式は$a+d=0$　・・・(答)

50

$$\frac{2^{3x}+4^{x+1}+2^{x+2}}{2^x+2}=\frac{(2^x)^3+4\cdot(2^x)^2+4\cdot 2^x}{2^x+2}$$
$$=\frac{2^x(2^x+2)^2}{2^x+2}$$
$$=2^x(2^x+2)$$
$$=4^x+2^{x+1}$$

より，$y=4^x+2^{x+1}$　・・・(答)

$$y=4^x+2^{x+1}$$
$$=(2^x)^2+2\cdot 2^x$$
$$=(2^x+1)^2-1$$

より，$(2^x+1)^2=y+1$

また，$y=4^x+2^{x+1}>0$

よって，$2^x+1=\sqrt{y+1}$（$y>0$）すなわち$2^x=\sqrt{y+1}-1$（$y>0$）

底が 2 の対数をとると，$x=\log_2\left(\sqrt{y+1}-1\right)$（$y>0$）

ゆえに，求める逆関数は$y=\log_2\left(\sqrt{x+1}-1\right)$（$x>0$）　・・・(答)

51

$$g(x)-x=f(f(x))-x$$
$$=af(x)(1-f(x))-x$$
$$=-a\{f(x)\}^2+af(x)-x$$
$$=-af(x)\{f(x)-x\}-a(x-1)f(x)-x$$
$$=-af(x)\{f(x)-x\}-a(x-1)\{f(x)-x\}-ax(x-1)-x$$
$$=-af(x)\{f(x)-x\}-a(x-1)\{f(x)-x\}+ax(1-x)-x$$
$$=-af(x)\{f(x)-x\}-a(x-1)\{f(x)-x\}+f(x)-x$$
$$=\{f(x)-x\}\{-af(x)-a(x-1)+1\}$$

よって，$g(x)-x$ は $f(x)-x$ で割り切れる。

補足

$g(x)-x$ を $f(x)$ について整理してから $f(x)-x$ で割り算した。

B

52

(1)

解法 1

$y=f(x)$ とすると，

$$f(x)=\frac{ax}{1+ax}$$
$$=\frac{-1+(1+ax)}{1+ax}$$
$$=-\frac{1}{1+ax}+1$$

より， $y=f(x)$ のグラフは双曲線だから，逆関数 $f^{-1}(x)$ が存在する。

よって， $f^{-1}(f(f(t)))=f(t)$ ・・・①

また， $f(f(t))=f(t)$ より， $f^{-1}(f(f(t)))=f^{-1}(f(t))=t$ ・・・②

したがって，①，②より， $f(t)=t$ が成り立つ。

解法 2

$f(f(t))=\dfrac{af(t)}{1+af(t)}$， $f(f(t))=f(t)$ より， $\dfrac{af(t)}{1+af(t)}=f(t)$

両辺に $1+af(t)$ を掛けて整理すると， $f(t)\{af(t)-a+1\}=0$

よって， $f(f(t))=f(t)$ を満たすとき， $f(t)=0,\ \dfrac{a-1}{a}$

$f(t)=0$ すなわち $\dfrac{at}{1+at}=0$ のとき

$a>1$ より， $t=0$ $\therefore f(0)=0$

$f(t)=\dfrac{a-1}{a}$ すなわち $\dfrac{at}{1+at}=\dfrac{a-1}{a}$ のとき

両辺に $a(1+at)$ を掛け，整理すると， $at=a-1$

これと $a>1$ より， $t=\dfrac{a-1}{a}$ $\therefore f\left(\dfrac{a-1}{a}\right)=\dfrac{a-1}{a}$

以上より， $f(f(t))=f(t)$ を満たすとき， $f(t)=t$ も満たす。

(2)

解法 1

$f(x)=\dfrac{ax}{1+ax}=-\dfrac{1}{1+ax}+1$ より，

$$
\begin{aligned}
f(f(x))&=-\frac{1}{1+af(x)}+1\\
&=-\frac{1}{1+a\cdot\dfrac{ax}{1+ax}}+1\\
&=-\frac{1+ax}{1+a(a+1)x}+1
\end{aligned}
$$

よって，

$$
\begin{aligned}
f(f(x))-f(x)&=-\frac{1+ax}{1+a(a+1)x}+1-\left(-\frac{1}{1+ax}+1\right)\\
&=-\frac{1+ax}{1+a(a+1)x}+\frac{1}{1+ax}\\
&=\frac{-(1+ax)^2+1+a(a+1)x}{\{1+a(a+1)x\}(1+ax)}\\
&=\frac{-ax(ax+1-a)}{\{1+a(a+1)x\}(1+ax)}
\end{aligned}
$$

これと $f(f(x))-f(x)\geq 0$ より， $\dfrac{-ax(ax+1-a)}{\{1+a(a+1)x\}(1+ax)}\geq 0$

この不等式を同値変形すると，

$ax(ax+1-a)\{1+a(a+1)x\}(1+ax)\leq 0$ （$1+a(a+1)x\neq 0,\ 1+ax\neq 0$）

ここで， $ax(ax+1-a)\{1+a(a+1)x\}(1+ax)=0$ の解は $x=0,\ \dfrac{a-1}{a},\ -\dfrac{1}{a(a+1)},\ -\dfrac{1}{a}$ であり，

これと $a>1$ より， $-\dfrac{1}{a}<-\dfrac{1}{a(a+1)}<0<\dfrac{a-1}{a}$

よって， $ax(ax+1-a)\{1+a(a+1)x\}(1+ax)\leq 0$ （$1+a(a+1)x\neq 0,\ 1+ax\neq 0$）の解，

すなわち，求める不等式の解は $-\dfrac{1}{a}<x<-\dfrac{1}{a(a+1)},\ 0\leq x\leq\dfrac{a-1}{a}$ ・・・(答)

補足

$\dfrac{f}{g}\leq 0\Leftrightarrow f\cdot g\leq 0$ （$g\neq 0$）， $\dfrac{f}{g}\geq 0\Leftrightarrow f\cdot g\geq 0$ （$g\neq 0$）

解法 2

$f(x)=\dfrac{ax}{1+ax}=-\dfrac{1}{1+ax}+1$ より，

$$
\begin{aligned}
f(f(x)) &= -\frac{1}{1+af(x)}+1 \\
&= -\frac{1}{1+a\cdot\dfrac{ax}{1+ax}}+1 \\
&= -\frac{1+ax}{1+a(a+1)x}+1 \\
&= -\frac{\dfrac{1}{a+1}\{1+a(a+1)x\}-\dfrac{1}{a+1}+1}{1+a(a+1)x}+1 \\
&= -\frac{1}{a+1}-\frac{\dfrac{a}{a+1}}{1+a(a+1)x}+1 \\
&= -\frac{a}{a+1+a(a+1)^2x}+\frac{a}{a+1}
\end{aligned}
$$

よって，$-\dfrac{a}{a+1+a(a+1)^2x}+\dfrac{a}{a+1}\geq-\dfrac{1}{1+ax}+1$

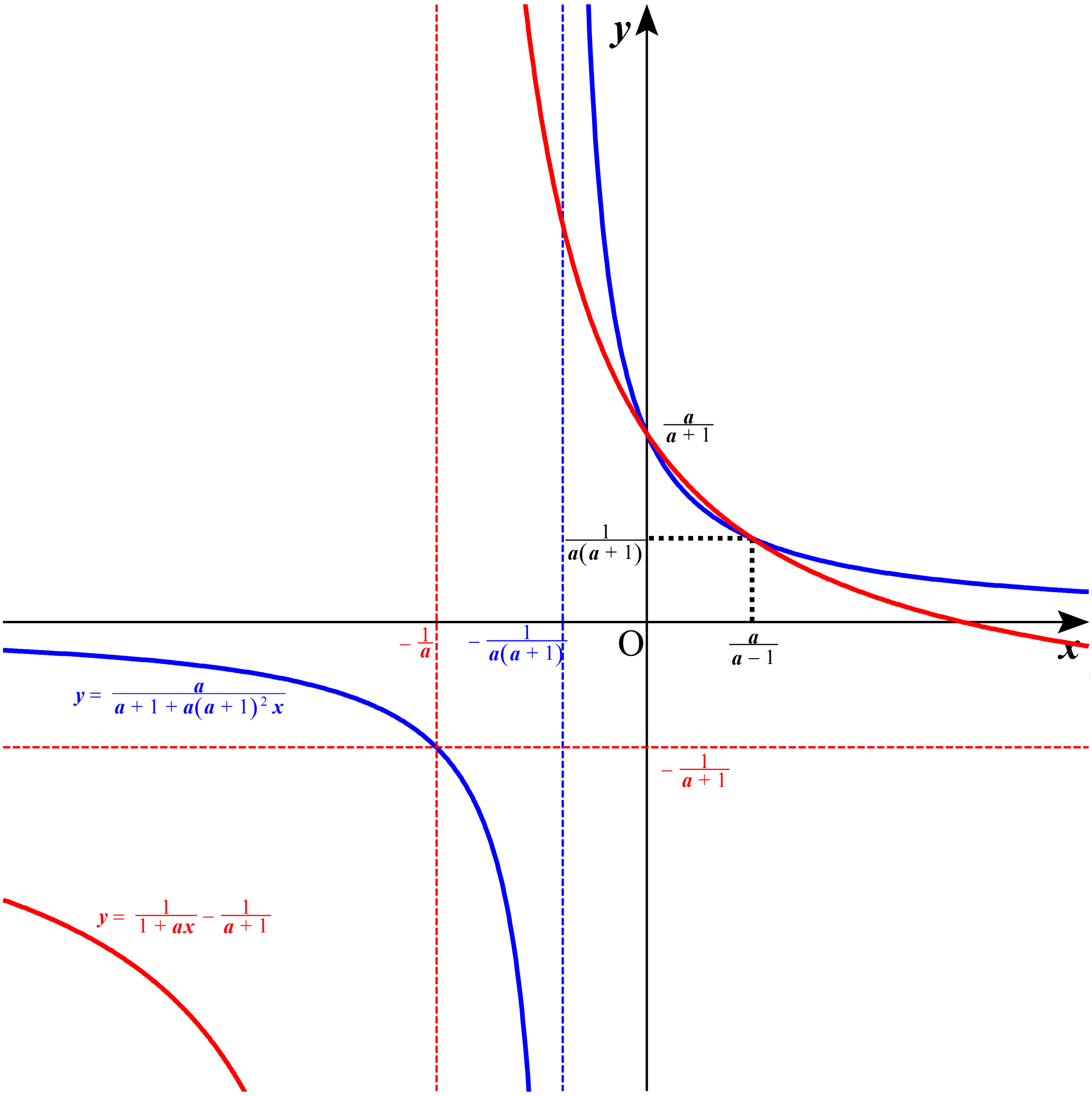
これを整理すると，$\dfrac{a}{a+1+a(a+1)^2x}\leq\dfrac{1}{1+ax}-\dfrac{1}{a+1}$ ・・・①

これと(1)の解法 2 より，$f(f(x))=f(x)$ の解は $x=0,\ \dfrac{a-1}{a}$ だから，

①は $x=0,\ \dfrac{a-1}{a}$ のとき等号が成立する。

よって，$y=\dfrac{a}{a+1+a(a+1)^2x}$ と $y=\dfrac{1}{1+ax}-\dfrac{1}{a+1}$ のグラフは次図のようになる。

ゆえに，求める不等式の解は $-\dfrac{1}{a}<x<-\dfrac{1}{a(a+1)},\ 0\leq x\leq\dfrac{a-1}{a}$ ・・・(答)



y
$\frac{a}{a+1}$
$\frac{1}{a(a+1)}$
$-\frac{1}{a}$
$-\frac{1}{a(a+1)}$
O
$\frac{a}{a-1}$
x
$y=\frac{a}{a+1+a(a+1)^2x}$
$-\frac{1}{a+1}$
$y=\frac{1}{1+ax}-\frac{1}{a+1}$

53

(1)

$y=f(x)$が$x=k$ （$k\neq 0$）に関して対称であるとすると，

任意の実数tについて$f(k+t)=f(k-t)$，すなわち，

$(k+t)^4+a(k+t)^3+b(k+t)^2+c(k+t)+d=(k-t)^4+a(k-t)^3+b(k-t)^2+c(k-t)+d$

が成り立つ。

よって，

$$
\begin{aligned}
&(k+t)^4+a(k+t)^3+b(k+t)^2+c(k+t)+d-\left\{(k-t)^4+a(k-t)^3+b(k-t)^2+c(k-t)+d\right\}\\
&\quad=(k+t)^4-(k-t)^4+a\left\{(k+t)^3-(k-t)^3\right\}+b\left\{(k+t)^2-(k-t)^2\right\}+c\{(k+t)-(k-t)\}\\
&\quad=\left\{(k+t)^2-(k-t)^2\right\}\left\{(k+t)^2+(k-t)^2\right\}+a\{(k+t)-(k-t)\}\left\{(k+t)^2+(k+t)(k-t)+(k-t)^2\right\}\\
&\qquad\quad+4bkt+2ct\\
&\quad=4kt\left(2k^2+2t^2\right)+2at\left(3k^2+t^2\right)+4bkt+2ct\\
&\quad=2(4k+a)t^3+2\left(4k^3+3ak^2+2bk+c\right)t
\end{aligned}
$$

より，$2(4k+a)t^3+2\left(4k^3+3ak^2+2bk+c\right)t=0$

これはtの恒等式だから，$4k+a=0$ ・・・① $4k^3+3ak^2+2bk+c=0$ ・・・②

①より，$k=-\dfrac{a}{4}$

これを②に代入すると，$4\left(-\dfrac{a}{4}\right)^3+3a\left(-\dfrac{a}{4}\right)^2+2b\left(-\dfrac{a}{4}\right)+c=0$ より，$8\left(a^3-4ab+8c\right)=0$

ゆえに，$a^3-4ab+8c=0$ ・・・(答)

(2)

$a^3-4ab+8c=0$ より，$c=\dfrac{-a^3+4ab}{8}$

よって，

$$
\begin{aligned}
y&=f(x)\\
&=x^4+ax^3+bx^2+\frac{-a^3+4ab}{8}x+d\\
&=\left(x^2+\frac{a}{2}x\right)^2-\frac{a^2}{4}x^2+bx^2+\frac{-a^3+4ab}{8}x+d\\
&=\left(x^2+\frac{a}{2}x\right)^2+\frac{-a^2+4b}{4}x^2+\frac{-a^2+4b}{4}\cdot\frac{a}{2}x+d\\
&=\left(x^2+\frac{a}{2}x\right)^2-\frac{a^2-4b}{2}\left(x^2+\frac{a}{2}x\right)+d
\end{aligned}
$$

したがって，$g(x)=x^2-\dfrac{a^2-4b}{2}x+d$，$h(x)=x^2+\dfrac{a}{2}x$ とおくと，$f(x)=g(h(x))$ より，

$y=f(x)$は 2 つの 2 次関数の合成関数となる。